www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ANALYSE NUMÉRIQUE

NOTATIONS

Suivant le contexte, les fonctions qui interviennent dans le problème seront à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^d$.

δ_{ij} : delta de Kronecker. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels,

$C^1(\mathbb{R})$: espace des fonctions numériques de la variable réelle continûment dérivables,

supp θ : le support d'une fonction θ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est le plus petit sous-ensemble fermé contenant tous les points où la fonction θ n'est pas nulle,

$C^1(\mathbb{R} \times [0,T[)$: espace des fonctions C^1 sur $\mathbb{R}\times]0,T[$ et continues sur $\mathbb{R} \times [0,T[$,

$C_0^1(\mathbb{R} \times [0,T[)$: espace des fonctions $C^1(\mathbb{R} \times [0,T[)$ à support compact,

$L^2(\mathbb{R})$: espace des classes des fonctions f telles que $|f|^2$ est intégrable au sens de Lebesgue.

On note $\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

$L^\infty(\mathbb{R} \times [0,T[)$: espace des fonctions de $\mathbb{R} \times [0,T]$ dans $\mathbb{R}$ bornées sauf éventuellement sur un sous-ensemble de mesure nulle.

$\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions numériques indéfiniment dérivables et à support compact dans Ω.

$\mathbb{R}_+$ designe les nombres réels ≥ 0 et $\mathbb{R}_+^*$ les réels > 0.

REMARQUE IMPORTANTE

Les correcteurs sauront apprécier des démonstrations claires et complètes, même si elles ne portent que sur quelques parties de l'épreuve. L'expérience montre qu'une très bonne note peut être obtenue sans que l'épreuve ait été traitée dans sa totalité.

DEFINITION

Etant donné un problème différentiel (équation différentielle plus conditions aux limites et/ou conditions initiales) on dit qu'une fonction u est une *solution régulière* si elle est continûment dérivable autant de fois que le problème l'exige et vérifie l'équation différentielle, les conditions aux limites et/ou les conditions initiales du problème.

PROBLÈME

Soit c un réel strictement positif. On cherche une application $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } t > 0,$$

(2) $$u(x,0) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ici u_0 designe une fonction réelle donnée, de la variable réelle.

1 a) Montrer que toute fonction u vérifiant (1) est constante le long des trajectoires $t \mapsto (t, x(t))$, définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, telles que

$$\frac{dx}{dt} = c.$$

b) Montrer que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x,t) = u_0(x_0)$.

c) Donner l'expression de u, solution de (1) vérifiant (2).

2) Soit $\psi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0,T[)$. Donner l'expression de u solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \psi \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } t > 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(L'expression de u comporte une intégrale.)

3) On suppose que $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et que $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0,T[)$. Montrer que

(3) $$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} u\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x,0)\,dx = 0,$$

où u est une solution de (1) vérifiant (2).

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. On dira que $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,T[)$ est une solution faible de (1)-(2) si (3) est vérifié pour tout $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0,T[)$.

Tournez la page S.V.P

4) Montrer que si (1)-(2) admet une solution faible alors elle est unique.

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ et soit θ une fonction de $C^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{supp } \theta = [-1,+1], \qquad \theta(x) > 0 \quad \forall x \in]-1,+1[, \qquad \int_{-1}^{+1} \theta(x)dx = 1.$$

On pose $$u_0^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\int_{-1}^{+1} \theta(\frac{s}{\epsilon})u_0(x-s)ds.$$

On montre que $u_0^\epsilon \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et que $\lim_{\epsilon \to 0} u_0^\epsilon = u_0$ dans $L^2(\mathbb{R})$,

la démonstration n'étant pas demandée.

5 a) Quelle est la solution faible de (1)-(2) correspondant à la condition initiale u_0^ϵ ?

b) Montrer que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, le problème (1)-(2) admet une solution faible unique.

On se propose d'approcher la solution de (1)-(2) à l'aide d'un schéma numérique. On pose

$$x_j = j\Delta x,\ j \in \mathbb{Z},$$
$$t_n = n\Delta t,\ n \in \mathbb{N},$$
$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

où Δx et Δt sont des réels strictement positifs donnés. On note v_j^n une approximation de $u(x_j,t_n)$, où u est solution de (1)-(2).

Un schéma de la forme

(4) $$v_j^{n+1} = H(v_{j-k}^n,...,v_{j+k}^n), \quad n \geq 0,\ j \in \mathbb{Z}$$

où

$$v_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_j} u_0(x)dx, \quad j \in \mathbb{Z} \qquad \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} \dots \right)$$

est dit d'ordre p si

$$\frac{1}{\Delta t}[u(x,t+\Delta t) - H(u(x-k\Delta x,t),...,u(x+k\Delta x,t))] = O((\Delta t)^p)$$

lorsque $\Delta t \to 0$ et que λ est fixe, pour toute solution régulière u de (1)-(2).

Pour de nombreux schémas, vérifiant notamment H linéaire, si

$$v_j^0 = \hat{v}^0 \exp(ikx_j), \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

où $\hat{v}^0 \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$ alors on a

$$v_j^n = \hat{v}^n \exp(ikx_j), \quad \forall j \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\hat{v}^n$ est donné par une relation de récurrence du type

$$\hat{v}^{n+1} = g(\lambda, k\Delta x)\hat{v}^n$$

avec λ fixé.

On dit que (4) est <u>stable</u> si $|g(\lambda,k\Delta x)| \leq 1$.

Le coefficient $g(\lambda,k\Delta x)$ est appelé *coefficient d'amplification.*

6) Montrer que si $u_0(x) = \exp(ikx)$ alors la solution de (1)-(2) est de la forme

$$u(x_j,t_n) = (G(\lambda,k\Delta x))^n u_0(x_j).$$

7) On considère le schéma

(5) $$\frac{1}{\Delta t}(v_j^{n+1} - v_j^n) + \frac{c}{2\Delta x}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) = 0.$$

Quel est l'ordre de ce schéma ?

8) Montrer que le schéma (5) est toujours instable.

9) On considère le schéma

$$\frac{1}{\Delta t}(v_j^{n+1} - v_j^n) + \frac{c}{2\Delta x}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) - \frac{c^2\Delta t}{2}\,\frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0.$$

Quel est l'ordre de ce schéma ?
Est il stable ?

Pour un schéma donné on note $E_a(\lambda,k\Delta x) = |g(\lambda,k\Delta x)| - |G(\lambda,k\Delta x)|$

l'erreur d'amplitude et

$E_\phi(\lambda,k\Delta x) = -$(argument $g(\lambda,k\Delta x)$ − argument $G(\lambda,k\Delta x)$)

Tournez la page S.V.P.

l'erreur de phase.

On pose $K = k\Delta x$.

10) Quel est l'ordre de l'erreur d'amplitude et de l'erreur de phase pour K petit (pour le schéma de la question 9) ?

11) Lorsque (4) est stable, le coefficient d'amplification est aussi appelé coefficient d'amortissement. Etudier le module de ce coefficient en fonction de K, pour λ fixé et en fonction de λ, pour K fixé (pour le schéma de la question 9).

Soient f et g deux applications C^1 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. On se propose de résoudre

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x,t))) = g(u(x,t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{7}$$

où $u(x,t) = (u_1(x,t), ..., u_d(x,t))^t$ (z^t désigne le transposé de z).

12) On suppose que $d = 1$ et que u est une solution régulière de (6), pour $0 \leq t < t^*$. On note $t \mapsto x(t)$ la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = f'(u(x(t),t)), & t \in [0, t^*[, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Montrer que si $g = 0$ alors $u(x(t),t) = u_0(x_0)$ pour tout $t \in [0, t^*[$.

Montrer que, lorsque $g \neq 0$, on peut trouver $u(x(t),t)$ comme solution d'un système d'équations différentielles.

13) On suppose $d = 1$, $f(u) = u^2/2$ et $g = 0$. En utilisant la question précédente, trouver la solution de (6) correspondant à la condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } 1 < x, \end{cases}$$

pour $t < 1$.

A-t-on $\lim_{t \to 1} u(\cdot, t)$ continue ?

On dit que $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ est une solution faible de (6) et (7) si

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + g(u) \cdot \phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \cdot \phi(x,0) dx = 0$$

pour tout $\phi \in (C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[))^d$. (Dans la définition précédente, le symbole $\cdot$ désigne le produit scalaire euclidien classique.)

14) Montrer que si u est une solution régulière de (6) et (7) alors elle est aussi une solution faible.

15) Soit Γ une courbe C^1 du plan des (x,t) $(t > 0)$, d'équation $x = x(t)$. On suppose que u est une solution faible de (6) et (7), régulière au voisinage de chaque côté de Γ et admettant une discontinuité de première espèce au passage de Γ. Si $(x,t) \in \Gamma$, on note

$$u_+(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} u(x + \epsilon, t) \text{ et } u_-(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} u(x - \epsilon, t).$$

Montrer que si $(x,t) \in \Gamma$ (avec $x = x(t)$) alors

$$\frac{dx}{dt}(u_+ - u_-) = f(u_+) - f(u_-). \tag{8}$$

Indication: On prendra un voisinage D à frontière régulière, d'un point (x,t) de Γ et l'on appliquera la définition avec $\phi \in (\mathcal{D}(D))^d$ sur les deux parties de D séparées par Γ.

16) Soit u une solution régulière de (6) et (7) dans des domaines O_i du plan (x,t), $(t > 0$ et $i = 1, ..., I)$. On suppose que la frontière de chaque domaine O_i est C^1 et que u vérifie la relation (8) en tout point de cette frontière.

Montrer que u est solution faible de (6) et (7).

17) Montrer que

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -t/2, \\ -1 & \text{si } -t/2 < x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < t/2, \\ 0 & \text{si } t/2 \leq x, \end{cases}$$

est une solution faible de (6) pour $d = 1$, $f(u) = u^2/2$, $g(u) = 0$ et $u_0 = 0$.

Est ce la seule solution faible ?

Tournez la page S.V.P.

Soient E et F deux applications C^2 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telles que:

(i) Si l'on note $E''(u)$ la matrice d'ordre d formée des dérivées secondes $\frac{\partial^2 E}{\partial u_i \partial u_j}(u)$, $i,j = 1,...,d$, on suppose que

$$E''(u)v \cdot v > 0 \quad \text{pour tout } v \neq 0 \text{ et tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) $E'(u) \cdot f'(u) = F'(u)$
où $E'(u)$ est le vecteur ligne de composantes $\partial E/\partial u_j$, $j = 1,...,d$, $F'(u)$ est le vecteur ligne de composantes $\partial F/\partial u_j$, $j = 1,...,d$ et $f'(u)$ est la matrice $(\partial f_i/\partial u_j)_{i=1,...,d;j=1,...,d}$.

18) Montrer que si u est une solution régulière de (6) et (7) on a

$$\frac{\partial}{\partial t}E(u) + \frac{\partial}{\partial x}F(u) = E'(u) \cdot g(u).$$

On suppose que, pour tout $\epsilon > 0$, le problème

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u^\epsilon) = \epsilon \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} + g(u^\epsilon), \tag{9}$$

$$u^\epsilon(x,0) = u_0(x), \tag{10}$$

admet une solution régulière convergeant, lorsque ϵ tend vers 0, vers u (p.p. dans $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$), solution faible de (6) et (7).

Avec les mêmes hypothèses que dans la question 15), on montre que la solution faible de (6) et (7) vérifie, pour tout $(x,t) \in \Gamma$, avec $x = x(t)$,

$$\frac{dx}{dt}(E(u_+) - E(u_-)) \geq F(u_+) - F(u_-). \tag{11}$$

19) On suppose que $d = 1$. En prenant

$$E(u) = |u-k| \quad (k \in \mathbb{R}) \text{ et } F(u) = \operatorname{sgn}(u-k)(f(u) - f(k)),$$

montrer que la relation (11) entraine

$$u_- < u_+ \implies \forall \alpha \in [0,1] \quad \alpha f(u_-) + (1-\alpha) f(u_+) \leq f(\alpha u_- + (1-\alpha)u_+),$$
$$u_+ < u_- \implies \forall \alpha \in [0,1] \quad \alpha f(u_-) + (1-\alpha) f(u_+) \geq f(\alpha u_- + (1-\alpha)u_+).$$

Une solution u de (6) telle que toute discontinuité de u_- à u_+ vérifie les relations précédentes est appelée *solution entropique*. On montre qu'elle est unique, la démonstration n'étant pas demandée.

20) On considère le problème scalaire

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}u^2(x,t)) = 0,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} u_- & \text{si } x < 0, \\ u_+ & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Donnez une solution entropique de ce problème suivant les valeurs des constantes u_- et u_+.

On suppose $d = 1$ et $g = 0$; on cherche à approcher la solution u de (6) et (7) en $x_j = j\Delta x$ et $t_n = n\Delta t$ ($j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), par v_j^n défini par le schéma

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \lambda(\phi_{j+\frac{1}{2}}^n - \phi_{j-\frac{1}{2}}^n), \quad j \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$v_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_0(x)dx, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \tag{13}$$

$$\left(\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \cdots \right)$$

où

$$\phi_{j+\frac{1}{2}}^n = \phi(v_{j-k+1}^n, ..., v_{j+q+1}^n)$$

la fonction ϕ étant une application C^1 de $\mathbb{R}^{k+q+1}$ dans $\mathbb{R}$,

$$\phi : (v_{-k}, ..., v_q) \mapsto \phi(v_{-k}, ..., v_q),$$

telle que

$$\phi(u, ..., u) = f(u).$$

La fonction ϕ est appelée *flux numérique* de (12). Le schéma (12) peut aussi s'écrire

$$v_j^{n+1} = H(v_{j-k}^n, ..., v_{j+q+1}^n). \tag{14}$$

On dit qu'il est d'ordre p si

$$\frac{1}{\Delta t}[u(x,t+\Delta t) - H(u(x-k\Delta x,t), ..., u(x+(q+1)\Delta x,t)] = O((\Delta t)^p),$$

lorsque $\Delta t \to 0$, pour λ fixé.

Tournez la page S.V.P.

21) Montrer les relations

$$\sum_{j=-k}^{q} \frac{\partial \phi}{\partial v_j}(u,...,u) = f'(u),$$

$$\sum_{j=-k}^{q+1} j \frac{\partial H}{\partial v_j}(u,...,u) = -\lambda f'(u),$$

$$\sum_{i,j=-k}^{q+1} (i-j)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j}(u,...,u) = 0.$$

22) Montrer que $H(u_{-k},...,u_{q+1}) = u - \lambda \Delta x f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$

$$+ \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{j=-k}^{q+1} j^2 \frac{\partial H}{\partial v_j}(u,...,u)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + O((\Delta x)^3),$$

où $u_0 = u$ et $u_j = u(x + j\Delta x, t)$, $j = -k, ..., q+1$.

23) Montrer que $\frac{1}{\Delta x}[u(x,t+\Delta t) - H(u(x-k\Delta x,t),...,u(x+(q+1)\Delta x,t))]$

$$= -\Delta t \frac{\partial}{\partial x}(\beta(u,\lambda)\frac{\partial u}{\partial x})(x,t) + O((\Delta t)^2),$$

où

$$\beta(u,\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{j=-k}^{q+1} j^2 \frac{\partial H}{\partial v_j}(u,...,u) - \frac{1}{2}f'(u)^2.$$

En déduire l'ordre minimal du schéma (12).

Quelle équation le schéma (12) approche-t-il à l'ordre 2 ?

Le schéma (14) est dit *monotone* si H est une fonction monotone croissante en chacun de ses arguments. *On montre alors que la fonction en escalier formée à partir des v_j^n calculés par (14) converge - dans un sens à préciser - vers la solution entropique de (6) et (7).*

24) Montrer que si (14) est monotone alors $\beta(u,\lambda) \geq 0$ et nous n'avons $\beta(u,\lambda) = 0$ que si f est linéaire.

25) On considère le schéma (12) avec $k = 1$, $q = 0$ et le flux numérique

$$\phi(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \frac{1}{2\lambda}(x_1 - x_2).$$

On suppose que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

Quelle condition doit vérifier λ pour que le schéma (12) soit monotone ?

On suppose que $g = 0$ et $f(u) = Au$, A étant une matrice de taille $d \times d$ à coefficients constants. On note λ_i, $i = 1, ..., d$, les valeurs propres de A supposées réelles, distinctes et ordonnées en croissant:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_d.$$

On note r^i le vecteur propre à droite (colonne) et l^i le vecteur propre à gauche (ligne) associés à la valeur propre λ_i, $(i = 1, ..., d)$:

$$Ar^i = \lambda_i r^i, \quad l^i A = \lambda_i l^i, \quad i = 1, ..., d,$$

On suppose que ces deux bases de vecteurs propres ont été choisies biorthonormales, soit

$$l^j \cdot r^i = \delta_{ij}, \quad i,j = 1, ..., d.$$

On cherche la solution u de (6) et (7) sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{d} v_i(x,t) r^i \quad \text{avec } v_i(x,t) \in \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., d.$$

26) Montrer que v_i est solution d'une équation de la forme (1).

27) Donner la solution explicite de (6) et (7) en fonction de u_0.

28) Explicitez dans le plan des (x,t) la solution correspondant à

$$u_0(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0, \\ b & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où $a = (a_1, ..., a_d)^t$ et $b = (b_1, ..., b_d)^t$ représentent deux vecteurs constants de $\mathbb{R}^d$.

Que devient cette solution si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_d \end{pmatrix}$?

29) Donnez la solution explicite de l'équation d'ondes linéaire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_1(x), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,0) = v_2(x), \end{cases}$$

où c est une constante réelle donnée.

On supposera connues des primitives de $\frac{1}{2c}(v_1 + cv_2)$ et de $\frac{1}{2c}(v_1 - cv_2)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail